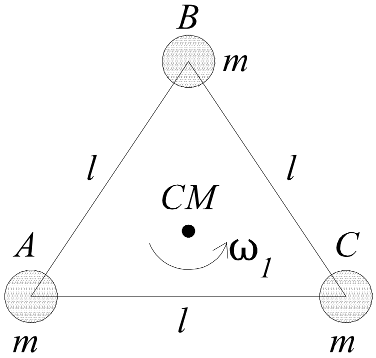
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = (Σ punten)/3 + 1

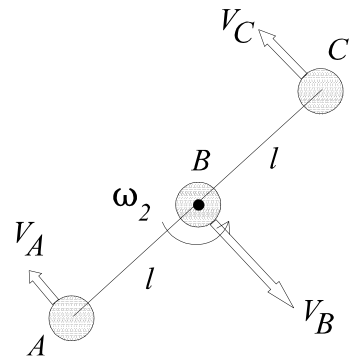
Opgave 1.



Drie voorwerpen, elk met een massa *m*, zijn onderling verbonden met identieke, massaloze koorden met een lengte *l*. Het geheel draait om het zwaartepunt met een hoeksnelheid ω_1, terwijl de koorden strak staan.

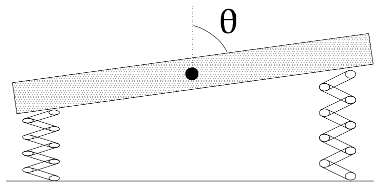
2 a. <u>Bereken</u> de spankracht in elk koord, uitgedrukt in *l* en ω_1.

Op een gegeven moment breekt het koord AC. Daardoor bewegen A en C uit elkaar.



3 b. <u>Bereken</u>, op grond van de behoudswetten, de snelheden V_A, V_B en V_C op het moment dat A, B en C op één lijn liggen en het koord strak staat.

Opgave 2.

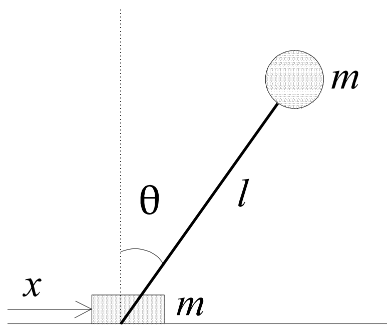


Een homogene balk met massa *m* en lengte *L* rust op twee identieke veren met veerkonstante *k*. De balk wordt vanuit evenwicht in een trilling gebracht waarbij het zwaartepunt van de balk op z'n plaats blijft. Op een gegeven moment maakt de balk een hoek θ met de vertikale as.

3 a. <u>Bereken</u> in dit geval de bewegingsvergelijking voor de balk, uitgedrukt in θ.

2 d. <u>Laat zien</u> dat de bewegingsvergelijking, in de kleine hoek benadering, die voor een harmonische trilling is en <u>bereken</u> de frequentie ω van deze trilling.

Opgave 3.



Een kogel met massa *m* is via een massaloze staaf met een lengte *l* scharnierend verbonden met een blokje, eveneens met massa *m*, dat wrijvingsloos over het horizontale vlak kan bewegen. Vanuit de vertikale stand wordt de kogel een klein beetje uit z'n evenwicht gebracht.

3 a. <u>Bereken</u> de kinetische en de potentiële energie van het geheel als

functie van de hoek θ en de hoeksnelheid $\frac{d\theta}{dt}$ en de snelheid $\frac{dx}{dt}$.

2 b. Laat met behulp van één van de Lagrange-vergelijkingen zien dat er behoud van impuls is in de horizontale richting.

2 c. Bereken de hoeksnelheid $\frac{d\theta}{dt}$ vlak voor dat de kogel de grond raakt ($\theta = \pi/2$).

Opgave 4.

Men wil een satelliet met een zo gering mogelijke snelheid - de ontsnappingssnelheid - vanaf de Aarde de ruimte in (oneindig ver weg van het zonnestelsel) lanceren.

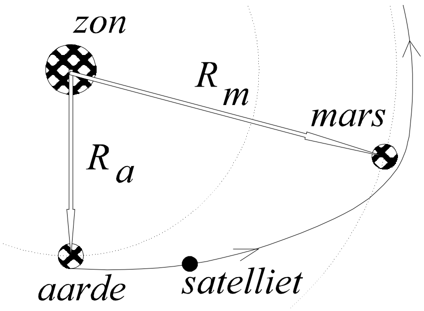
G	$= 6{,}7.10^{-11}$ N kg^2 m^{-2}
M_{aarde}	$= 6{,}0.10^{24}$ kg
M_{mars}	$= 0{,}64.10^{24}$ kg
M_{zon}	$= 2{,}0.10^{30}$ kg
straal aarde r_a	$= 6{,}4.10^{6}$ m
baanstraal aarde R_a	$= 0{,}15.10^{12}$ m
baanstraal mars R_m	$= 0{,}23.10^{12}$ m

2 a. Bereken de ontsnappingssnelheid van een satelliet vanaf de Aarde, rekening houdend met de gravitatie van de Aarde en de Zon.

Veronderstel de baan, waarmee de Aarde om de Zon draait, cirkelvormig.

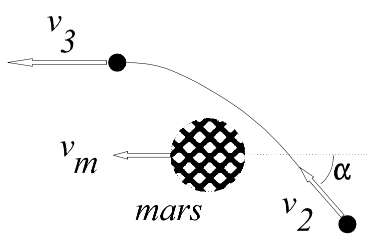
1 b. Bereken de baansnelheid v_a van de Aarde.

1 c. Bereken de ontsnappingssnelheid van een satelliet, in het stelsel van de Aarde, als deze in de richting van de baansnelheid van de Aarde gelanceerd wordt.



Nu lanceert men de satelliet in een dusdanige baan dat deze vlak langs Mars scheert en daardoor wordt 'meegesleurd'. Door de gravitatiekracht van Mars wordt de baan van de satelliet zo afgebogen dat deze in dezelfde richting als de baansnelheid van Mars wegvliegt (zie tekening).
Beschouw de situatie na het afbuigen op $1{,}0 . 10^{9}$ m van Mars. De satelliet heeft dan een snelheid v_3 (zie tekening).

1 d. Bereken de minimale waarde van v_3 opdat de satelliet oneindig ver weg van het zonnestelsel kan komen.



Veronderstel ook de baan, waarmee Mars om de Zon draait, cirkelvormig.

1 e. Bereken de baansnelheid v_m van Mars.

Als de satelliet in de buurt van Mars (óók op $1{,}0\ 10^{9}$ m van Mars) aankomt, geldt voor de hoek van de snelheid van de satelliet met de baansnelheid van Mars: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$.

2 f. Bereken de grootte van de snelheid v_2 waarmee de satelliet op deze afstand van Mars aankomt.

2 g. Bereken de ontsnappingssnelheid v_1 van de satelliet, in het stelsel van de Aarde, waarmee deze vanaf de Aarde gelanceerd moet worden, als de baan op de hierboven beschreven wijze via Mars loopt.

1a. Stel spankracht is S, afstand CM tot elke massa is $\frac{1}{3}l\sqrt{3}$. Spankrachten per massa vectorieel optellen levert: $2 . S . \frac{1}{2}\sqrt{3} = m\omega_1^2\frac{1}{3}l\sqrt{3}$ zodat $S = \frac{1}{3}ml\omega_1^2$

b. Vóór het breken geldt: - totale impuls = 0: $v_A = v_B = v_C = \frac{1}{3}l\sqrt{3}\omega_1$

- impulsmoment is: $3 \times (m\frac{1}{3}l\sqrt{3}\omega_1) . \frac{1}{3}l\sqrt{3} = ml^2\omega_1$

- kin.energie is: $3 \times \frac{1}{2}m(\frac{1}{3}l\sqrt{3}\omega_1)^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega_1^2$

Nà het breken geldt: - totale impuls = 0: $v_A + v_B + v_C = 0$

- impulsmoment: $m(v_C - v_A)l = ml^2\omega_1 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} v_C = v_A + l\omega_1 \\ v_B = -v_A - v_C = -(2v_A + l\omega_1) \end{matrix}$

- kin.energie is: $\frac{1}{2}m(v_A^2 + (2v_A + l\omega_1)^2 + (v_A + l\omega_1)^2) = \frac{1}{2}ml^2\omega_1^2$

Hieruit volgt: $v_A = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})l\omega_1$; $v_B = -(2 - \frac{1}{3}\sqrt{3})l\omega_1$; $v_C = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})l\omega_1$

2a. De kin.energie is: $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{24}L^2\dot{\theta}^2$; pot.energie is: $U = 2 \times \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}kL^2\cos^2\theta$

Uit L-vergelijking volgt: $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{6k}{m}\sin\theta\cos\theta = 0$

met $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ en ϕ klein volgt: $\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{6k}{m}\phi = 0$; dit is de vergelijking van een harmonische trilling met frequentie: $\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$

3a. KE is: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\cos\theta . \dot{\theta})^2 + (l\sin\theta . \dot{\theta})^2] = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = ml\cos\theta . \dot{x} . \dot{\theta}$

U is: $U = mgl\cos\theta$

b. De Lagrangiaan is onafhankelijk van x zodat $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta} = constant = 0$. Dit komt overeen met behoud van impuls in de hor.richting immers $p_{blokje} = m\dot{x}$ en $p_{kogel} = m\frac{d}{dt}(x + l\sin\theta) = m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}$

c. Uit b) volgt met $\theta = \pi/2$ dat $\dot{x} = 0$. De kin.energie is dan $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Uit behoud van energie volgt dan $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl$ zodat $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$

4a. Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mm_a}{r_a} + G\frac{mm_z}{R_a}$; invullen van gegevens levert: $v = 44$ km/s

b. Centripetale kracht = zwaartekracht: $\frac{v_a^2}{R_a} = G\frac{m_z}{R_a^2}$; invullen van gegevens levert: $v_A = 30$ km/s

c. Relatieve snelheid is $v' = v - v_a = 14$ km/s

d. $\frac{1}{2}mv_3^2 = G\frac{mm_m}{10^9} + G\frac{mm_z}{R_m}$; invullen van gegevens levert: $v_3 = 34$ km/s

e. $\frac{v_m^2}{R_m} = G\frac{m_z}{R_m^2}$; invullen van gegevens levert: $v_m = 24$ km/s

f. De relatieve snelheid (in het stelsel van Mars) is $v_2' = v_3 - v_m = 10$ km/s. Bij nadering en vertrek op dezelfde afstand van Mars heeft de satelliet tov Mars dezelfde snelheid $v_2' = v_3 - v_m = 10$ km/s. De relatieve snelheid vectorieel opgeteld bij de baansnelheid van Mars levert de snelheid tov een inertiaalstelstel v_2. Uit de gegeven hoek volgt dat de baansnelheid van Mars en de relatieve snelheid loodrecht op elkaar staan zodat $v_2^2 = (v_2^/)^2 + v_m^2 = 676$. Hieruit volgt $v_2 = 26$ km/s

g. Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mm_z}{R_m} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mm_a}{r_a} - G\frac{mm_z}{R_a}$

zodat $v_1 = 38$ km/s en $v_1^/ = v_1 - v_a = 8$ km/s (vergelijk met antwoord in c; energiewinst = 67% !).